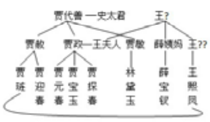
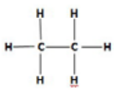
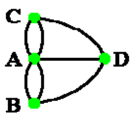
图的基本概念

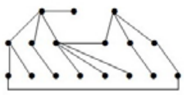
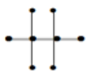
图论的研究对象

- 世界由事物组成,事物之间有联系.
- 图可以直观地描述事物及其间联系.
  - 用结点表示事物
  - 用边表示事物间联系
- 可见,图模型几乎可用于任何领域.
- **图论**(*graph theory*)就是以这种结点和边构成的图为研究对象.

图的例子

七桥问题 红楼家谱 乙烷

图的定义

graph
vertex
edge
adjacent

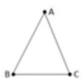
- 定义:**图**G是二元组(V,E),其中
  - V是非空**顶点**集合
  - E是**边**集合,每条边与V中两个顶点(可相同)相关联.
    - 若边e与顶点u,v关联,称u和v **相邻**, 亦称e连接u,v.
- 对任意图G,约定用$V(G)$和$E(G)$表示该图的顶点集和边集.

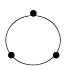
图的画法

- 图可以画出来:顶点画成点,边画成连接顶点的曲线.
- 例如下图G可画成右边两种样子:

$V(G) = \{A,B,C\}$

$E(G) = \{e_{AB}, e_{BC}, e_{AC}\}$





有限图vs无限图

- 有限图:V和E是有限集合
- 无限图:V或E是无限集合
- 我们只讨论有限图:

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

  - 以后不加说明时,都假定图有n个结点,m条边.
  - 若$|V(G)| = n$,称G是n阶图.

无向图vs有向图

- 无向边:边无方向,可视为顶点的无序对.
  - 记作$e=\{u,v\} = uv = vu$, u和v称为e的**端点**.
- 有向边:边有方向,可视为顶点的有序对.
  - 记作$e=(u,v)$, u称**始点**, v称**终点**.
- 无向图:E中都是无向边.
  - 以后不加说明的都是无向图.
- 有向图: E中都是有向边.

undirected edge
directed edge
endpoint
initial vertex
terminal vertex
undirected graph
directed graph

简单图vs多重图

loop
multiple edge
multigraph
simple graph
null / empty graph
complete graph

- 环:所关联的两个顶点重合的边.
- 重边:关联两个顶点的多条边.
- 多重图:有重边的图.
- 简单图:无重边无环的无向图.
  - 完全图:任意两个不同顶点都相邻的简单图.
    - n个结点的完全图记作K_n.
  - 空图/零图:无边的简单图,记作N_n.

顶点的度

- 顶点的**度**(*degree*):与顶点v关联的边数.
  - 记作$d_G(v)$或$d(v)$.
  - 环对$d(v)$的贡献为2.
  - 对有向图:$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$
    - 出度(*out-degree*) $d^+(v)$ = 以v为始点的边数
    - 入度(*in-degree*) $d^-(v)$ = 以v为终点的边数
    - 环对出度,入度各贡献1.
- 例如: K_n中各顶点的度都为$n-1$.

有关度的若干术语

- **孤立点**:度为0的顶点
- **悬点**:度为1的顶点
  - **悬边**:与悬点关联的边
- **奇点**:度为奇数的顶点
- **偶点**:度为偶数的顶点
- **正则图**:各顶点度相同
  - 若度为k,称为k-正则图.
  - 例如:K_n是$(n-1)$-正则图

握手定理及其推论

- 定理[**握手定理**]:图$G=(V,E)$,若$|E| = m$.则

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2m$$

- 推论:G中奇点数目必为偶数.
- 推论:K_n的边数为$n(n-1)/2$.

二部图

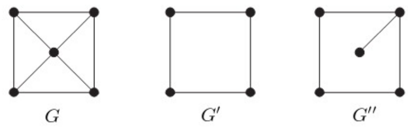
- 定义:设$G=(V,E)$是简单图.若V可划分为不相交的非空集合V_1和V_2,且E中所有边都连接V_1中的一个顶点和V_2中的一个顶点,则称G为**二部图**(*bipartite graph*)或**偶图**.
  - 若V_1中任一顶点都与V_2中每个顶点相邻,则称为**完全二部图**.
    - 若$|V_1| = m$, $|V_2| = n$, 则完全二部图记为$K_{m,n}$

子图

- 定义:给定$G=(V,E)$, 如果$G'=(V',E')$满足$V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$,则称G'是G的**子图**(*subgraph*),记作$G'\subseteq G$.
  - 如果$G'\neq G$,则称G'是G的**真子图**,记作$G'\subset G$;
    - 平凡子图: G和N_n
  - 如果$V'=V$,则称G'是G的**支撑**(*spanning*)**子图**或**生成子图**;
  - 如果E'包含了G在V'中的所有边,则称G'是G的**导出**(*induced*)**子图**.

例:子图

- 下图中
  G'和G''都是G的子图
  G'是G的导出子图,而G''不是
  G''是G的支撑子图,而G'不是



图的运算

- 定义$G_1=(V_1,E_1)$和$G_2=(V_2,E_2)$的
  - 并: $G_1\cup G_2=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2)$
  - 交: $G_1\cap G_2=(V_1\cap V_2, E_1\cap E_2)$
  - 对称差: $G_1\oplus G_2=(V_1\cup V_2, E_1\oplus E_2)$
    $=(V_1\cup V_2, (E_1-E_2)\cup(E_2-E_1))$

图的运算(续)

- 若G_2是G_1的子图,则定义
  - 差: $G_1-G_2=(V_1, E_1-E_2)$
    - n阶简单图G的**补图**$\overline{G}$: K_n-G
- 从G中删去顶点v及其关联的边: $G-v$
  - 显然:$G-v$是G的导出子图
- 从G中删去边e: $G-e$
  - 显然:$G-e$是G的支撑子图
- 向G中增加边$e_{ij}=v_iv_j$: $G+e_{ij}$

图的同构

- 定义:给定两个图$G_1=(V_1,E_1)$和$G_2=(V_2,E_2)$.如果在V_1和V_2之间存在双射f使得
  u,v在G_1中相邻 *iff* $f(u), f(v)$在G_2中相邻
  则称G_1和G_2**同构**(*isomorphic*),记作$G_1\cong G_2$.
- 下例是同构的补图

同构的判定

- 判断同构很难,但可利用一些必要条件判断不同构.
- 若$G_1\cong G_2$,则
  (1) $|V(G_1)|=|V(G_2)|$, $|E(G_1)|=|E(G_2)|$;
  (2) G_1和G_2顶点度的非增序列相同;
  (3) G_1的任一导出子图在G_2中都有与之同构的导出子图;反之亦然.

图的表示法:邻接矩阵

- 简单图$G = (V,E)$的**邻接矩阵**(*adjacency matrix*)是一个$n×n$矩阵**A**,其元素为:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- 邻接矩阵可以表示环,也可扩展成能表示重边数目.
- 对无向图: **A**是对称矩阵.

图的表示法:关联矩阵

- 简单图$G = (V,E)$的关联矩阵(*incidence matrix*)是一个$n×m$阶矩阵**M**,其元素为

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{边}e_j\text{与顶点}v_i\text{关联} \\ 0, \text{否则} \end{cases}$$

- 能表示重边和环.

例题

证明:任意6个人中必有三人相互认识或者有三人互不相识.

证:作K_6并给边涂色:红=认识,蓝=不认识.只要证图中必有同色三角形.

v_1有5条边,由抽屉原则必有三边同色(设为红),这三边的另一顶点设为v_2, v_3, v_4.

△$v_2v_3v_4$有一边为红色,则与v_1构成红色△;

△$v_2v_3v_4$的三边无红色,则构成蓝色△.

End