谓词逻辑

二

主要内容

✓谓词与量词
✓谓词公式
- 等值演算
- 范式
- 谓词逻辑推理
- 归结法推理

公式的等值

- 谓词公式A和B如果在任一解释下都有相同的真值,就说A和B**等值**(或**等价**),记作$A \Leftrightarrow B$.
- **定理**

  $\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$ ***iff*** $\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$ **是永真式**

  – 注:教材上干脆以此定理作为等值的定义.

约束变元换名规则

- 约束变元的名字是无关紧要的.
- **换名规则**:对于公式$(\forall x)A$(或$(\exists x)A$),设变元y不在A中出现,将A中所有受此量词约束的x出现都换成y得到A',且量词改成$(\forall y)$(或$(\exists y)$).得到的公式$(\forall y)A'$(或$(\exists y)A'$)与原公式等值.

自由变元替换规则

- **替换规则**:对于公式A, x在A中出现,y不在A中出现.将A中所有x的自由出现都换成y,得到A', 则A'与A等值.

由PL得到FOL的等值式

- 定义:设A是含命题变元$p_1,\ldots, p_n$的命题逻辑公式, $A_1,\ldots, A_n$是谓词逻辑公式.对$1\le i\le n$,用A_i替换p_i的每一处出现,所得谓词逻辑公式A'称为命题逻辑公式A的**替换实例**.
- 定理:命题逻辑的永真式(或永假式)的任何替换实例都是谓词逻辑的永真式(或永假式).
- 推论:命题逻辑的等值式可经替换得到谓词逻辑的等值式.
- 例如:

  $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ ➔ $\neg\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)$

  $p\to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ ➔ $P(x)\to Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee Q(x)$

基本等值式(1)

- 量词的转化

  $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$

  $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$
- 例:

  $\neg(\forall x)(Animal(x) \to Cat(x))$并非动物都是猫

  $\Leftrightarrow (\exists x)\neg(Animal(x) \to Cat(x))$

  $\Leftrightarrow (\exists x)(Animal(x) \wedge \neg Cat(x))$存在不是猫的动物

基本等值式(2)

- $\forall$对$\wedge$, $\exists$对$\vee$的分配律

  $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

  $(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$
- $\forall$对$\vee$, $\exists$对$\wedge$没有分配律!
  - 例如:

  $(\forall x)(Man(x)\vee Woman(x))$

  所有人要么是男人要么是女人.

  $(\forall x)Man(x)\vee(\forall x)Woman(x)$

  要么所有人都是男人,要么所有人都是女人.

基本等值式(3)

- 量词对$\wedge$及$\vee$的分配律

  $(\forall x)(P(x)\vee B) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee B$

  $(\forall x)(P(x)\wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge B$

  $(\exists x)(P(x)\vee B) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee B$

  $(\exists x)(P(x)\wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \wedge B$
  - 其中B不含x的自由出现!
    - 或干脆规定B不含x
  - 这个条件很容易满足:对约束变元改名即可.

基本等值式(4)

- 量词对$\to$的分配律

  $(\exists x)(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$

  $(\forall x)(P(x) \to B) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \to B$

  $(\forall x)(B \to P(x)) \Leftrightarrow B \to (\forall x)P(x)$

  $(\exists x)(P(x) \to B) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \to B$

  $(\exists x)(B \to P(x)) \Leftrightarrow B \to (\exists x)P(x)$
  - 其中B不含x的自由出现!
    - 或干脆规定B不含x

基本等值式(5)

- 量词交换律

  $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y)$

  $(\exists x)(\exists y)P(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y)$

等值演算

- 利用基本等值式,进行谓词逻辑的推理.
- 判断永真式
- 例:

  $((\exists x)P(x)\to(\exists x)Q(x)) \to (\exists x)(P(x)\to Q(x))$

  $\Leftrightarrow$ ……

主要内容

- ✓谓词与量词
- ✓谓词公式
- ✓等值演算
- 范式
- 谓词逻辑推理
- 归结法推理

范式

- 回忆:任何命题逻辑公式都有与之等值的范式.
- 谓词逻辑公式也有范式
  - 前束范式:与原公式等值
  - Skolem范式:与原公式只有较弱的关系(等可满足性)

前束范式

- 定义:如果公式A中的所有量词都非否定地置于公式左端,且其辖域都延伸到公式的末端,则称A是**前束范式**(*prenex normal form*).即: A形如

  $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)\ M(x_1,\ldots,x_n)$

  其中诸Q_i为量词$\forall$或$\exists$, M不含量词,称为A的**母式**(**基式**, *matrix*).
- **前束范式定理:任一公式都有与之等值的前束范式.**

如何转化成PNF

1.消去$\rightarrow$和$\leftrightarrow$

2.否定词内移
- 应用De Morgan律

3.约束变元易名(如果必要的话)

4.量词左移
- 应用分配等值式

例:求PNF

$\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b)\rightarrow R(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b)\vee R(x)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b) \vee R(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists z)\neg Q(z,b) \wedge \neg R(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)(\exists y)(P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a,x,y)\wedge\neg Q(z,b)\wedge\neg R(x)\wedge(p\vee\neg p))$

Skolem范式

- 前束范式对前束量词没有次序要求,也没有其他要求.
- 如果对前束范式进而要求
  - 所有$\exists$都在$\forall$之左,或者
  - 只保留$\forall$而消去$\exists$

  便得**Skolem范式**的两种形式.

Skolem范式(1):∃-前束范式

- 一个公式的∃-前束范式形如
  $(\exists x_1)\ldots(\exists x_i)(\forall x_{i+1})\ldots(\forall x_n)M(x_1,\ldots,x_n)$
  - 是前束范式
  - 至少有一个存在量词
  - 存在量词都在全称量词的左边
  - $M(x_1,\ldots,x_n)$中不再有量词,也无自由个体变元

∃-前束范式定理

- 定理:任一公式A都可化为∃-前束范式A',并且

  A普遍有效 *iff* A'普遍有效.
- 说明:
  - 只有普遍有效的公式A,才与其∃-前束范式是等值的.
  - 一般的公式与其∃-前束范式并不等值.
  - 用于FOL完备性的证明.

例:∃-前束范式

求$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)$的∃-前束范式($P$中无量词).

1.先求前束范式.本例已是.

2.关键一步:$(\forall y)$改写成$(\exists y)\ldots(\forall z)$.形如

$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u) \wedge \neg S(x,y)) \vee (\forall z)S(x, z))$
- 引入新谓词S和新变元z.(直观意义?)

3.$(\forall z)$左移即得结果:

$(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x,y,u) \wedge \neg S(x,y)) \vee S(x, z))$

- 当有多个∀在∃的左边,可按此法逐一右移.

Skolem范式(2):无∃前束范式

- PNF中消去所有∃而只保留∀.
  - 术语“Skolem范式”一般指这种形式.
- **定理:任一公式A都可化为Skolem范式A',并且**

  A(不)可满足 *iff* A'(不)可满足.
  - 不是等值(*equivalent*),而是“等可满足”(*equisatisfiable*).

例:Skolem范式

$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x, y, z, u, v, w)$

1.先求前束范式.本例已是.

2.关键:消去∃.方法是引入个体常元或函数.如

$(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a, y, z, u, v, w)$
- 消去$\exists x$:引入新个体常元a代入x

3.消去$(\exists u)$时,引进的个体因为与左边的y和z有关,所以不能用个体常项,而是用函数

$(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a, y, z, f(y,z), v, w)$

4.消去$(\exists w)$: $(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y,z), v, g(y,z,v))$

例:Skolem范式不保持等值

比较$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$:
- 在{1,2}域上
  $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$

  $\Leftrightarrow (P(1,1) \vee P(1,2)) \wedge (P(2,1) \vee P(2,2))$

  $(\forall x)P(x, f(x)) \Leftrightarrow P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$
- 两者明显不等值.但在(不)可满足的意义下两者是一致的.

主要内容

✓谓词与量词
✓谓词公式
✓等值演算
✓范式
- 谓词逻辑推理
- 归结法推理

谓词逻辑推理

- 命题逻辑中有关永真蕴涵和推理的形式结构等的讨论都可引伸到谓词逻辑中,并可把命题逻辑推理作为谓词逻辑推理的一个部分.
- 这里我们讨论谓词逻辑所特有的推理形式和基本推理公式.

回顾:永真蕴涵关系⇒

- 给定公式A和B,若在任何赋值下, A为真则B也为真,则称A**永真蕴涵**B,记作$A \Rightarrow B$.
  - A是前提, B是A的逻辑结论.
  - ⇒即日常所说的“推出”关系

⇒与→的关系

- 定理:对公式A和B,
  $A \Rightarrow B$ *iff* $A \to B$是永真式
  - 所以$A \Rightarrow B$ 称为**永真蕴涵式**.
  - 注:教材中干脆利用→来定义⇒.
- 定理:对公式A和B,
  $A \Rightarrow B$ *iff* $A \wedge \neg B$是矛盾式

基本永真蕴涵式

(I_{14}) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$
(I_{15}) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$
(I_{16}) $(\exists x)P(x) \to (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \to Q(x))$
(I_{17}) $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$
(I_{18}) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$
(I_{21}) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$
$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$
$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$
$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$
$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)Q(x)$
$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \to R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \to R(x))$
$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$

举例说明:基本永真蕴涵式

(I_{15}) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

语义说明:若个体域是某班学生,$P(x)$表示x是高材生,$Q(x)$表示x是运动健将,那么$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$表示有学生既是高材生又是运动健将,而$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$是说有高材生并且有运动健将(但不要求高材生和运动健将是同一个学生).

显然成立,因为结论比前提弱.

但此推理的逆不成立.

推理规则

- 命题逻辑中的推理演算可推广到谓词逻辑.
  - 推理规则(P规则,T规则,CP规则等)都可直接移入谓词逻辑.
- 此外,还需引入4条有关量词的推理规则.

全称特指规则

- US(*Universal Specification*):
  $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$
  - y是个体变元, $A(y)$是在$A(x)$中对x代入y的结果.
    - 左:A对所有个体为真,右:那对任一个体y, $A(y)$当然为真.
    - 特例:用个体常元代入x..
  - 要确保引入的y的任意性(即自由变元),因此:
    - 当$A(x)$中含有量词和其他变元时,需使得y不被量词约束.
- 例如: $(\forall x)((\exists z)(x<z))$在实数上成立,于是$(\exists z)(y<z)$也成立.
  - 但若将y取为z,便有$(\exists z)(z<z)$,这是矛盾式.

存在特指规则

- ES(*Existential Specification*):
  $(\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$
  - 含义:如果存在个体使$A(x)$为真,那么就让c是这种个体,则$A(c)$当然为真.
  - c不能在$A(x)$中,前面的推导中,及待证结论中出现.
    - 反例:在实数域上$(\exists x)(c<x)$是成立的,但$c<c$不成立.
  - 还需限制$(\exists x)A(x)$中没有自由个体变元出现.
    - 反例:实数域上$(\exists x)(x>y)$成立.由于y是自由个体变元,这时不能推导出$c>y$.
    - 这时可引入个体函数$c(y)$.
  - 这是数学里常用的存在推理法.

全称推广规则

- UG(Universal Generalization):
  $A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$.
  - 若任意个体y (自由变元)都使A为真,则 $(\forall x)A(x)$为真.
  - 限制: x不在$A(y)$中出现.
    - 使引入的量词不能约束A中其他变元
  - 为确保y的任意性,在获得$A(y)$的推导过程中:
    - y可通过US,条件证明或归谬证明的假设引入
    - 各前提中y不是自由变元;
    - 未使用过ES规则,或未使用ES引入y,或未使用ES引入$z(y)$
- 例: $(\exists z)(z>y)$在实数域上成立,则$(\forall x)((\exists z)(z>x))$也成立.
  - 但若引入$(\forall z)$,$(\forall z)(\exists z)(z>z)$是不成立的.
  - 又:若前面引入的y代表某特定个体,也不能作UG

存在推广规则

- EG(*Existential Generalization*):
  $A(c) \Rightarrow (\exists x)A(x)$
  - 含义:如果有个体常项c使A为真,那么$(\exists x)A(x)$为真.
  - 其中c是个体常项.
  - 需限制x不出现在$A(c)$中.
    - 反例:实数域上$(\exists x)(x>0)$成立,但$(\exists x)(\exists x)(x>x)$不成立.

多个量词下的规则使用

- $(\forall x)(\exists y)A(x,y) \Rightarrow (\exists y)A(x,y)$
  - 右端不能写成$(\exists y)A(y,y)$
- $(\forall x)A(x,c) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)A(x,y)$
  - 右端不能写成$(\exists x)(\forall x)A(x,x)$
- $(\forall x)(\exists y)A(x,y) \Rightarrow (\exists y)A(x,y) \Rightarrow A(x,c)$
  - 但不能反推出$(\forall x)A(x,c)$和$(\exists y)(\forall x)A(x,y)$!
    - 原因是$(\forall x)(\exists y)A(x,y)$成立时,对每个$x$所找到的$y$是依赖于$x$的,从而$A(x,y)$的成立是有条件的,不是对所有的$x$都有同一个$y$.

推理演算

- 在谓词逻辑里,要证明$A \Rightarrow B$, 真值表法不适用,又不存在判明$A \to B$ 普遍有效的一般方法.从而使用推理规则的**推理演算**是谓词逻辑的基本推理方法.
- 推理演算过程:
  - 首先将以自然语句表示的推理问题形式化表示
  - 若不能直接使用基本永真蕴涵式,便消去量词,在无量词下使用规则和公式推理
  - 最后再引入量词.

例:推理演算(1)

前提: $(\forall x)(P(x)\to Q(x)),(\forall x)(Q(x)\to R(x))$
结论: $(\forall x)(P(x)\to R(x))$
证明

(1) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))$	P(前提)
(2) $P(x)\to Q(x)$	US
(3) $(\forall x)(Q(x)\to R(x))$	P
(4) $Q(x)\to R(x)$	US
(5) $P(x)\to R(x)$	T(2),(4)I_{10}
(6) $(\forall x)(P(x)\to R(x))$	UG

例:推理演算(2)

人皆有死,苏格拉底是人,所以苏格拉底会死.
令$P(x)$:x是人,$Q(x)$:x会死.于是问题可改述为
$(\forall x)(P(x)\to Q(x)) \wedge P(\text{Socrates}) \to Q(\text{Socrates})$
证明

(1) $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	P
(2) $P(x)\to Q(x)$	US
(3) $P(\text{Socrates}) \to Q(\text{Socrates})$	替换
(4) $P(\text{Socrates})$	P
(4) $Q(\text{Socrates})$	T(3)(4) I_{10}

例:推理演算(3)

前提: $(\exists x)P(x)\to(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\to R(x)), (\exists x)P(x)$
结论: $(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y))$
证明

(1) $(\exists x)P(x)\to(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\to R(x))$	P
(2) $(\exists x)P(x)$	P
(3) $(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\to R(x))$	T(1)(2) I_{10}
(4) $P(c)$	(2) ES
(5) $(P(x)\vee Q(x))\to R(x)$	(3) US
(6) $(P(c)\vee Q(c))\to R(c)$	替换
(7) $P(c)\vee Q(c)$	T(4) I_3
(8) $R(c)$	T(6)(7) I_{10}
(9) $(\exists x)R(x)$	(8) EG
(10) $(\exists y)R(y)$	(8) EG
(11) $(\exists x)R(x) \wedge (\exists y)R(y)$	(9)(10)
(12) $(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y))$	(11) E_{38}

例:推理演算(4)

分析下面推理的正确性.

(1) $(\forall x)(\exists y)(x > y)$	P
(2) $(\exists y)(z > y)$	US
(3) $z > b$	ES
(4)$(\forall z)(z > b)$	UG
(5) $b > b$	US
(6) $(\forall x)(x > x)$	UG

从(1)到(2),应记住y是依赖于z的.
从(2)到(3), b是依赖于z的.
从(3)到(4)不成立: 因为b是依赖于z的.
从(5)到(6)也错: 因为b是常项.

主要内容

✓谓词与量词
✓谓词公式
✓等值演算
✓范式
✓谓词逻辑推理
- 归结法推理

谓词逻辑的归结推理法

- 归结证明法可推广到谓词逻辑,证明过程同命题逻辑,只不过要考虑量词和个体变元带来的复杂性.
- 使用推理规则的推理演算灵活而技巧性强;归结法较为机械,易于计算机实现.

归结证明过程

1.写出$G = A \wedge \neg B$

- 回忆:为证明$A \Rightarrow B$,可等价地证明$A \wedge \neg B$不可满足.

2.建立G的子句集S

- 将G化成等值的前束范式;
- 再化成无∃前束范式(母式合取范式化)G^*;
  - 回忆: G不可满足 *iff* G^*不可满足
- 再将G^*中的∀省略,并将G^*中的每个简单析取式表示为一个子句,便得子句集S.
  - S中的变元均被∀约束
  - S与G是同不可满足的

归结证明过程(续)

3.对S进行一步归结:

若S中有两个子句$C_1 = L_1 \vee C_1'$, $C_2 = \neg L_2 \vee C_2'$,且对L_1与L_2有替换σ,使得两者**合一**(*unification*)

$$L_1\sigma = L_2\sigma$$

则可对其进行归结,得到归结式$C_1'\sigma \vee C_2'\sigma$,放入$S$中.

4.重复(3),直至得到矛盾式(空子句).

例:合一

例如: 设$C_1 = P(x) \vee Q(x)$, $C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$,对$P(x)$与$P(a)$进行变元代入$\sigma = \{x/a\}$后即可合一, 从而可做归结.

因此对$C_1\sigma$和$C_2\sigma$归结后得到归结式

$$Q(a) \vee R(y)$$

例:归结法证明

$(\forall x)(P(x)\to Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x)\to R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x)\to R(x))$

1.改写成公式G:

$(\forall x)(P(x)\to Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x)\to R(x)) \wedge \neg(\forall x)(P(x)\to R(x))$

2.求G的子句集S:可分别对三个合取项求子句集,然后求其并集.(这样求得的子句集并非S,但与S是同不可满足的)

$(\forall x)(P(x)\to Q(x))$的子句集为$\{\neg P(x) \vee Q(x)\}$

$(\forall x)(Q(x)\to R(x))$的子句集为$\{\neg Q(x) \vee R(x)\}$

$\neg(\forall x)(P(x)\to R(x)) = (\exists x)\neg(\neg P(x) \vee R(x)) = (\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x))$

经Skolem化得子句集$\{P(a), \neg R(a)\}$

于是得到G的子句集: $\{\neg P(x)\vee Q(x), \neg Q(x)\vee R(x), P(a), \neg R(a)\}$.

例:归结法证明(续)

3. 归结过程:

(1) $\neg P(x)\vee Q(x)$	
(2) $\neg Q(x)\vee R(x)$	
(3) $P(a)$	
(4) $\neg R(a)$	
(5) $Q(a)$	(1)(3)归结
(6) $R(a)$	(2)(5)归结
(7) 空(矛盾)	(4)(6)归结

End